数　学

注　意

1 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ までで，7 ページにわたって印刷してあります。
また，解答用紙は両面に印刷してあります。

2 検査時間は 50 分で，終わりは午前 11 時 00 分です。

3 声を出して読んではいけません。

4 答えは全て解答用紙にＨＢ又はＢの鉛筆（シャープペンシルも可）を使って明確に記入し，**解答用紙だけを提出しなさい。**

5 答えに根号が含まれるときは，**根号を付けたまま，分母に根号を含まない形で表しなさい。**また，**根号の中を最も小さい自然数にしなさい。**

6 答えは解答用紙の決められた欄から**はみ出さないように書きなさい。**

7 答えを直すときは，きれいに消してから，消しくずを残さないようにして，新しい答えを書きなさい。

8 **受検番号**を解答用紙の表面と裏面の決められた欄に書き，表面については，**その数字の ⬭ の中を正確に塗りつぶしなさい。**

9 解答用紙は，汚したり，折り曲げたりしてはいけません。

1 次の各問に答えよ。

〔問1〕 $\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}\div\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ を計算せよ。

〔問2〕 2次方程式 $(3x-1)^2-2(3x-1)-8=0$ を解け。

〔問3〕 1から6までの目が出る大小1つずつのさいころを同時に1回投げる。

大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とするとき，a^2-b^2 を計算した結果が $5k$（k は整数）の形で表される確率を求めよ。

ただし，大小2つのさいころはともに，1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

〔問4〕 右の**図1**は，中学生15人の小テストの結果をヒストグラムに表したものである。ヒストグラムの各階級の幅は左側の数値を含み，右側の数値を含まず，16点以上18点未満の生徒は0人である。

図1のヒストグラムを箱ひげ図に表したとき，右の**図2**の**ア**～**エ**のうちから，適切であるものを**2つ**選び，記号で答えよ。

ただし，テストの点数は全て整数とする。

図1

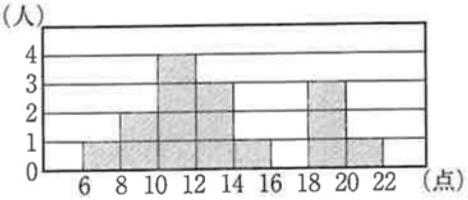
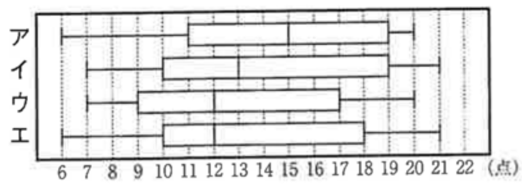


図2



〔問5〕 右の**図3**のように，半直線OX，半直線OYがあり，∠XOY＝80°である。

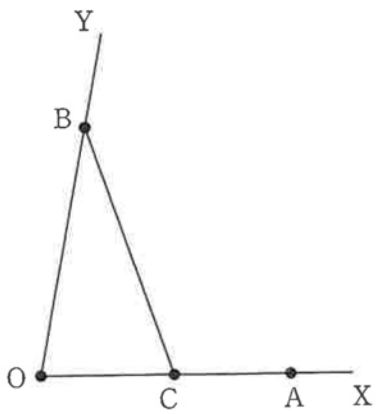
点A，点Bはそれぞれ半直線OX，半直線OY上にあり，OA＝OBとなる点である。

半直線OX上にあり，∠OCB＝70°となる点をCとし，点Bと点Cを結ぶ。

解答欄に示した図をもとにして，半直線OY上にあり，2点B，Cを通る円の中心Dを，定規とコンパスを用いて作図し，点Dの位置を示す文字Dも書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図3



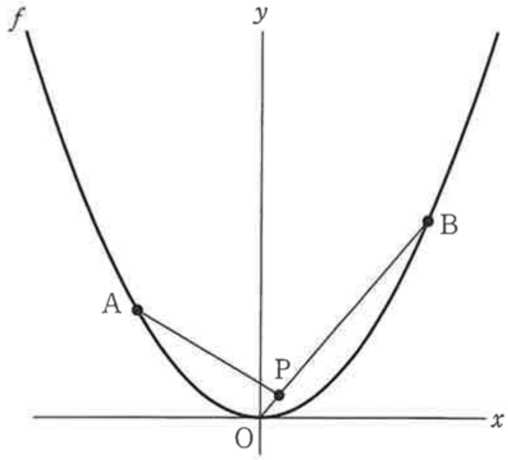
2 右の**図1**で，点Oは原点，曲線fは関数$y=ax^2(a>0)$のグラフを表している。

2点A，Bはともに曲線f上にあり，点Aのx座標は-3，点Bのx座標は4である。

点Oと点Bを結び，線分OB上にある点をPとし，点Aと点Pを結ぶ。

点Oから点$(1,\ 0)$までの距離，および点Oから点$(0,\ 1)$までの距離をそれぞれ1 cmとして，次の各問に答えよ。

図1



〔問1〕 **図1**において，点Pのx座標が$\dfrac{3}{2}$である場合を考える。

2点A，Pを通る直線について，xの変域$-3 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$に対する$y$の変域が$\dfrac{3}{2} \leqq y \leqq \dfrac{9}{4}$であるとき，$a$の値を求めよ。

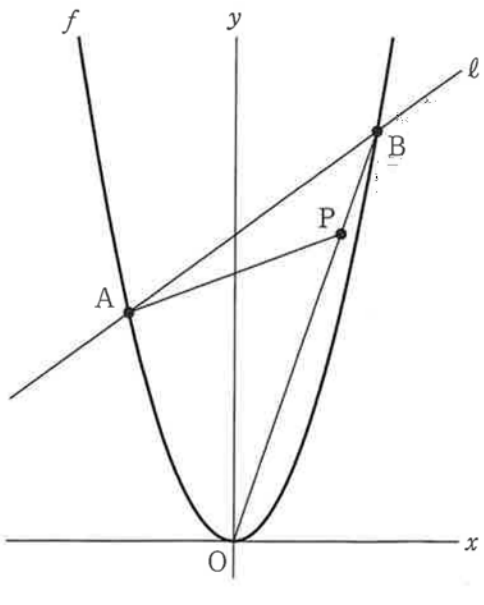
〔問2〕 右の**図2**は，**図1**において，$a=\dfrac{2}{3}$，2点A，Bを通る直線をℓとし，点Pのx座標が3の場合を表している。

曲線f上にあり，点Aと点Bに一致しない点をQとした場合を考える。

△APBと△AQBの面積が等しくなるとき，点Qのとりうるx座標の値の全ての和を求めよ。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

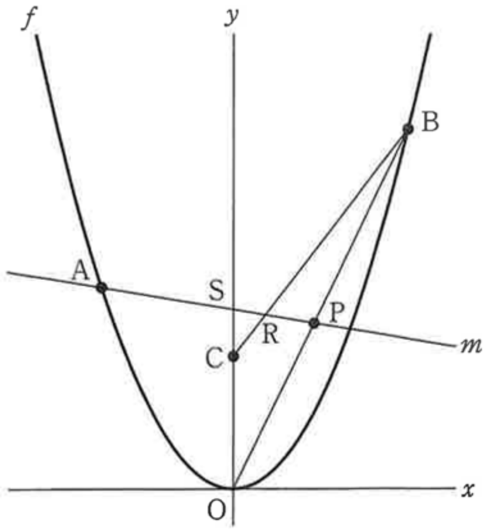
図2



〔問 3〕　右の**図 3** は，**図 1** において，2 点 A，P を通る一次関数 $y=bx+4$ $(b<0)$ のグラフを表す直線を m，y 軸上にあり，y 座標が 3 である点を C，点 B と点 C を結んだ線分 BC と直線 m との交点を R，直線 m と y 軸との交点を S とした場合を表している。

△CRS の面積が $\dfrac{6}{17}$ cm^2 のとき，b の値を求めよ。

図 3



3 右の**図1**で，点Oは線分ABを直径とする半円の中心である。

点Cは$\overset{\frown}{AB}$上にある点で，点A，点Bのいずれにも一致しない。

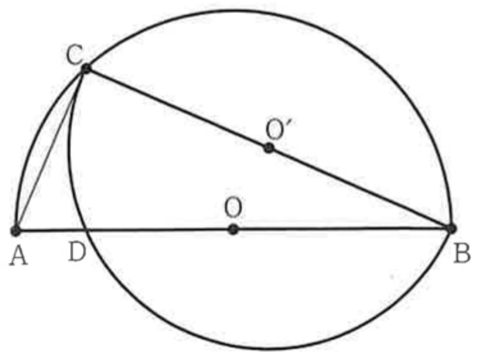
点O′は，点Bと点Cを結んだ線分BCを直径とする半円の中心で，半円O′の$\overset{\frown}{BC}$は線分BCに対して，点Oと同じ側にある。

半円O′における$\overset{\frown}{BC}$と線分ABとの交点をDとする。

点Aと点Cを結ぶ。ただし，AC＜BCとする。

次の各問に答えよ。

図1

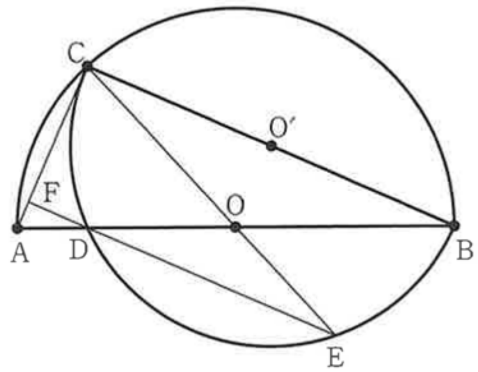


〔問1〕 **図1**において，AC＝6 cm，BC＝8 cmのとき，線分ADの長さは何cmか。

〔問2〕 右の**図2**は，**図1**において，点Oと点Cを結んだ線分OCをOの方向に延ばした直線と半円O′における$\overset{\frown}{BD}$との交点をE，点Dと点Eを結んだ線分DEをDの方向に延ばした直線と線分ACとの交点をFとした場合を表している。

△ADF∽△CEFであることを証明せよ。

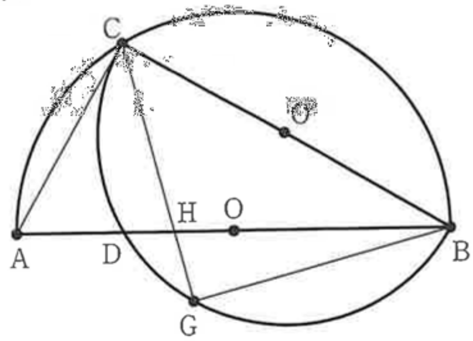
図2



〔問 3〕 右の**図 3** は，**図 1** において，半円 O′ における $\overset{\frown}{BD}$ 上にある点を G とし，点 B と点 G，点 C と点 G をそれぞれ結び，線分 AB と線分 CG との交点を H とした場合を表している。

AB = 4 cm，∠BAC = 60°，∠BCG = 45° のとき，△BCH の面積は何 cm^2 か。

図 3



4 中学生のＫさんは，授業で学習した「自然数aを8で割った余り」について，次の【表】にまとめた。

【表】

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	……
8で割った余り	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	……

このとき，Ｋさんは，自然数aを8で割ると余りが繰り返し現れることに気付き，次の【設定１】を考えた。

【設定１】

右の図１で，八角形ABCDEFGHは，一辺の長さが1 cmの正八角形であり，ＡからＨまでの8個の頂点に，0から7までの8個の数字をそれぞれ付ける。

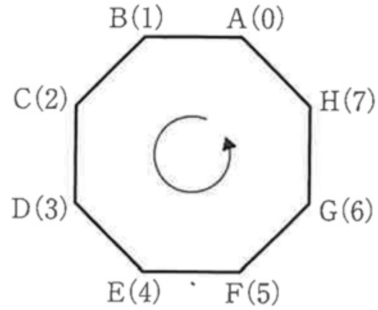
2点Ｐ，Ｑは，次のア，イに従って動く。

m，nは自然数とする。

ア　点Ｐは，頂点Ａから出発し，八角形ABCDEFGHの周上を毎秒5 cmの速さで反時計回り（矢印の方向）にm秒間動く。

イ　点Ｑは，八角形ABCDEFGHのいずれかの頂点から出発し，周上を毎秒3 cmの速さで反時計回り（矢印の方向）にn秒間動く。

図１



次の会話は【設定１】について話しているＫさんと友人のＹさんの会話である。

Ｋさん：点Ｐが10秒間動くとき，どのように動くと思う？
Ｙさん：点Ｐは毎秒5 cmの速さで動くから，頂点Ａを出発して1秒ごとに
Ｆ→Ｃ→Ｈ→Ｅ→Ｂ→Ｇ→Ｄ→Ａ→Ｆ→Ｃのように移動するね。
Ｋさん：点Ｐが1秒ごとに移動する頂点は，【表】と関係があるんだよ。
Ｙさん：例えば，点Ｐが12秒間動くとき，どの頂点に停止するのかな。
Ｋさん：点Ｐは，12秒間で60 cm進み，1周8 cmだから，60を8で割ると余りが4で，
頂点Ｅで停止することが分かるね。
Ｙさん：せっかくだから，【設定１】を用いて問題を解いてみよう。

次の各問に答えよ。

〔問1〕【設定１】で，2点Ｐ，Ｑが，頂点Ａから同時に出発し，停止せずに動く場合を考える。
2点Ｐ，Ｑが出発したあと，同じ頂点に初めて同時に重なるのは何秒後か。

〔問 2〕 **【設定１】**で，点Ｐが先に動き出し，点Ｐが停止した頂点から，ただちに点Ｑが出発する場合を考える。

2 点Ｐ，Ｑは合わせて 117 秒間動き，点Ｐが頂点Ａを出発してから点Ｑが停止するまでに，2 点Ｐ，Ｑの動いた総距離が，八角形 ABCDEFGH 50 周以上の長さだった。

点Ｐの動く時間が最も短いとき，点Ｑが停止する頂点はＡからＨのうちのどれか求めよ。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

次に，Ｋさんは，自然数 a を 8 以外の自然数で割った余りについても，**【表】**と同じように自然数 a の余りが繰り返し現れることに気付いた。

そこで，次の**【設定２】**を考えた。

【設定２】

右の**図２**は，**図１**において，八角形 ABCDEFGH の外側にある点をＯとし，点Ｏと頂点Ａ，点Ｏと頂点Ｂをそれぞれ結び，$OA = OB = x$ (cm) となる場合を表している。

ただし，x は $1 \leqq x \leqq 55$ を満たす自然数である。

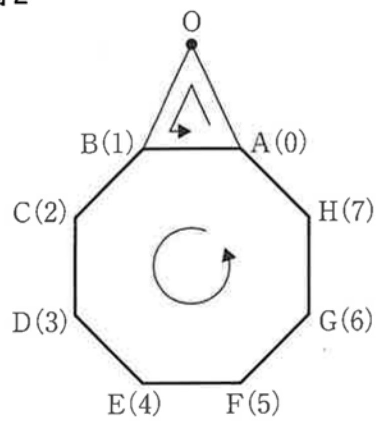
2 点Ｐ, Ｑは，頂点Ａから同時に出発し，次の**ウ**，**エ**に従って動く。

m，n は自然数とする。

ウ　点Ｐは，八角形 ABCDEFGH の周上を毎秒 5 cm の速さで反時計回り（矢印の方向）に m 秒間動く。

エ　点Ｑは，周の長さが $2x+1$ (cm) の△AOB の周上を毎秒 3 cm の速さで反時計回り（矢印の方向）に n 秒間動く。

図２



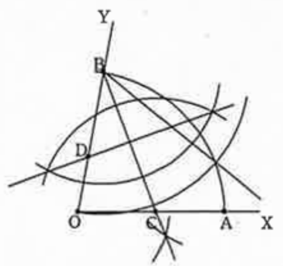
〔問 3〕 **【設定２】**で，2 点Ｐ，Ｑは，頂点Ａから同時に出発し，560 秒後に頂点Ａで同時に重なり，この 560 秒間で 1 回以上頂点Ａで同時に重なることが分かっている。

このとき，x の値は何通りあるか。

正答表　数学

1

1		点
[問1]	$2\sqrt{5}$	5
[問2]	$\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}$	5
[問3]	$\frac{7}{18}$	5
[問4]	イ，エ	5
[問5]		5



2

2		点
[問1]	$a = \frac{1}{4}$	7
[問2]	【 途中の式や計算など 】	10

$y=\frac{2}{3}x^2$ より，A$(-3,\ 6)$，B$\left(4,\ \frac{32}{3}\right)$ となる。

よって，2点O，Bを通る直線の式は $y=\frac{8}{3}x$ となり，

点Pの x 座標は3であるから，点Pの座標は(3，8)

また，直線 ℓ は，傾きは $\frac{2}{3}$ で，A$(-3,\ 6)$ を通るから，

直線 ℓ の式は　$y=\frac{2}{3}x+8$

よって，直線 ℓ と y 軸との交点の座標は (0，8)

また，点P(3，8)を通り，傾き $\frac{2}{3}$ となる直線の式は　$y=\frac{2}{3}x+6$

点Qは曲線 f 上の点であるから，Q$\left(t,\ \frac{2}{3}t^2\right)$とおくことができる。

また，直線 $y=\frac{2}{3}x+6$ 上の点でもあるから，Q$\left(t,\ \frac{2}{3}t+6\right)$

したがって，$\frac{2}{3}t^2=\frac{2}{3}t+6$ を解くと　$t=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$

直線 ℓ と y 軸との交点の座標は (0，8) であるから，

同様に，点(0，10)を通り，傾き $\frac{2}{3}$ となる直線の式は　$y=\frac{2}{3}x+10$

点Qは曲線 f 上の点であるから，Q$\left(u,\ \frac{2}{3}u^2\right)$とおくことができる。

また，直線 $y=\frac{2}{3}x+10$ 上の点でもあるから，Q$\left(u,\ \frac{2}{3}u+10\right)$

したがって，$\frac{2}{3}u^2=\frac{2}{3}u+10$ を解くと　$u=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$

以上より，求める x 座標の全ての和は

$$\frac{1+\sqrt{37}}{2}+\frac{1-\sqrt{37}}{2}+\frac{1+\sqrt{61}}{2}+\frac{1-\sqrt{61}}{2}=2$$

（答え）　2

		点
[問3]	$b = -\frac{1}{6}$	8

3

3		点
[問1]	$\frac{18}{5}$ cm	7
[問2]	【 証 明 】	10

△ADFと△CEFにおいて，

OA＝OCより，△OACは二等辺三角形だから

底角は等しくなり，∠OAC＝∠OCA

すなわち，∠DAF＝∠ECF　…　①

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角は等しいから，

∠DEC＝∠DBC　…　②

また，OB＝OCより△OBCは二等辺三角形だから

底角は等しくなり，∠OBC＝∠OCB　…　③

②，③より，

∠DEC＝∠DBC＝∠OBC

＝∠OCB＝∠ECB

錯角が等しいとき2直線は平行だから，

BC // EF

平行線の同位角は等しいから，

∠ADF＝∠DBC　…　④

②，④より，

∠ADF＝∠DBC

＝∠DEC＝∠CEF　…　⑤

①，⑤より，2組の角がそれぞれ等しいから，

△ADF ∽ △CEF

		点
[問3]	$(3\sqrt{3}-3)$ cm^2	8

4

4		点
[問1]	4 秒後	7
[問2]	【 途中の式や計算など 】	10

初めに，点Pが m 秒間動いて停止し，

次に点Pが停止した頂点から点Qが出発し，

n 秒間動いて停止したとする。

ただし，m，n は自然数である。

点P，点Qが合わせて117秒間動くので

$m+n=117$　…　①

点P，点Qが動いた合計の長さは，$5m+3n$ であるから，

①を代入して

$5m+3(117-m)=351+2m$ となる。

ここで，$L=351+2m$ とおくと，

正八角形を50周以上してから停止するから，

$L\geqq 50\times 8$ …　②　が成り立つ。

m は自然数であることと，②より，$m\geqq 25$

よって，m が最も小さいのは $m=25$

したがって，点Pは25秒間，点Qは92秒間動く。

よって，$25\times5+92\times3=401$，$401=8\times50+1$

余りが1より，頂点Bに停止する。

（答え）　頂点B

		点
[問3]	7 通り	8