令和 4年度　開成高校

1 以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $7x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = 0$ を考える。

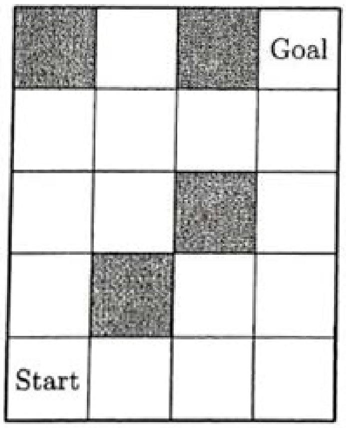
(i) 2 つの解を求めよ。

(ii) (i) で求めた 2 つの解のうち $\dfrac{2}{5}$ に近い方を，小数第 4 位を四捨五入して，小数第 3 位まで求めよ。なお，$\sqrt{2}$ の近似値として 1.414 を用いてよい。

(2) 下の図のマスを，上下左右に 1 回あたり 1 マス移動する駒を考える。周囲の枠の外と塗られた部分に移動することはできないが，それ以外は自由に移動できる。この条件のもとで，以下の問いに答えよ。

(i) Start と書かれた位置にある駒が，7 回の移動で Goal と書かれたマスに到着する場合の数を求めよ。

(ii) Start と書かれた位置にある駒が，ちょうど 9 回目の移動ではじめて Goal と書かれたマスに到着する場合の数を求めよ。



$\boxed{2}$ 文字式 A, B に対する，次の操作 1, 2 を考える。

操作 1 A を $\dfrac{B^2+1}{A}$ で置き換え，B はそのままにする。

操作 2 B を $\dfrac{A+1}{B}$ で置き換え，A はそのままにする。

以下では，分母は常に 0 でないと仮定してよい。いま，$A=x$, $B=y$ の状態から出発して，操作 1, 2 を交互に繰り返すことを考える。まず操作 1 を行うと，B は y のままで A が

$$\frac{B^2+1}{A}=\frac{y^2+1}{x}$$

に置き換わる。続けて操作 2 を行うと，今度は A が $\dfrac{y^2+1}{x}$ のまま，B が

$$\frac{A+1}{B}=\frac{\dfrac{y^2+1}{x}+1}{y}=\left(\frac{y^2+1}{x}+1\right)\times\frac{1}{y}=\frac{y^2+1+x}{xy}$$

に置き換わる。

なお，文字式で作られる分数に対しても，分子・分母に同じ式がかけられたものは同一とみなす。たとえば

$$\frac{xy-y^2}{x^2-y^2}=\frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{y}{x+y}$$

という具合である。

以下の問いに答えよ。

(1) $A=\dfrac{y^2+1}{x}$, $B=\dfrac{y^2+1+x}{xy}$ の状態から操作 1 を行った後の A を求めよ。なお分母が xy^2 に，分子が多項式になる形で解答すること。

(2) (1) が終わった状態から操作 2 を行った後の B を求めよ。(1) と同様，分母が単項式に，分子が多項式になる形で解答すること。

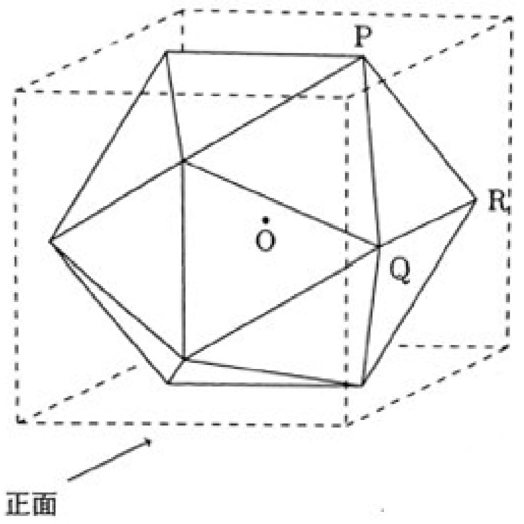
(3) (2) が終わった状態から操作 1 を行った後の A を求めよ。

(4) (3) が終わった状態から操作 2 を行った後の B を求めよ。

$\boxed{3}$ 1 辺の長さが 4 の立方体を考える。この中に，次の条件を満たす正多面体 X を考える。

- 正多面体 X の各頂点には，5 つの合同な正三角形が集まっている。
- 立方体の 6 つの面が，正多面体 X のいずれかの辺を含む。

また図のように，立方体の面に含まれる正多面体 X の 1 つの辺を QR とし，さらに △PQR が正多面体 X の面をなすよう，点 P をとる。



この正多面体 X の体積を計算しよう。以下，辺 QR の中点を S とする。

(1) 正多面体 X の立面図（正面から眺めた図）を，解答欄に記入せよ。長さは必ずしも正確でなくてよい。ここで，解答欄に点線で描かれた正方形は，立方体を正面から見た図を表す。

以下の問題を解くにあたっては，解答欄 (1) の図に考察をかき加えてよい。

(2) 正多面体 X の 1 辺の長さを 2ℓ とおく。
  (i) PS の長さを，ℓ を用いて表せ。
  (ii) 三平方の定理を用いて，ℓ が満たす 2 次方程式を 1 つ作れ。方程式の右辺が 0 になり，かつ ℓ^2 の係数が 1 になる形で解答すること。
  (iii) ℓ を求めよ。

(3) 立方体の対称の中心を O とする。正多面体 X の全ての面は，点 O から等距離にある。この距離を h とする。
  (i) △OPS の面積を求めよ。
  (ii) h を求めよ。解答にあたっては，分母の有理化を行うこと。

(4) この正多面体 X の体積を求めよ。

4 次の，先生と生徒「勉（つとむ）」君の会話を読んで以下の問いに答えよ。

先生：勉君は，「円に内接している四角形の性質」と「四角形が円に内接する条件」は知っているかな？

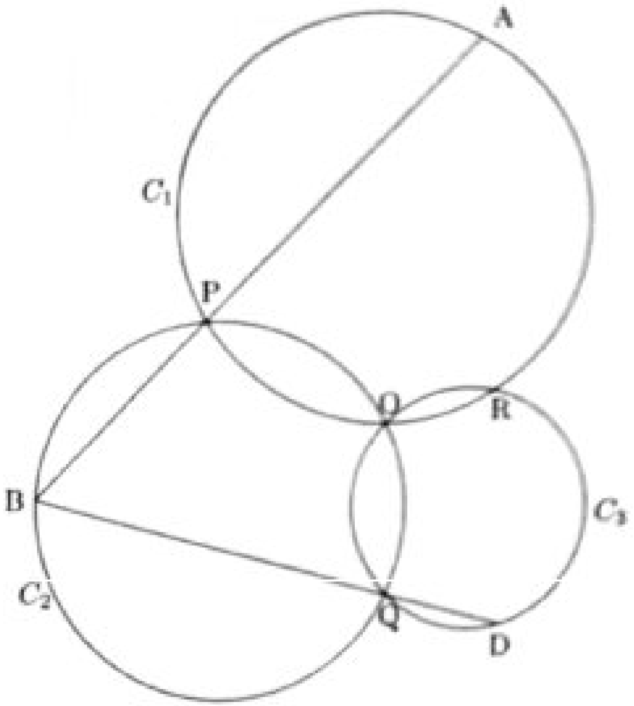
勉：前回の授業で先生に習ったので大丈夫です。

先生：では，今日はいきなり応用の難問に挑戦してみるよ。次の問題を考えてみよう。

> 点Oを共有する3つの円 C_1, C_2, C_3 を考える。
>
> C_1 と C_2 の O 以外の交点を P，C_2 と C_3 の O 以外の交点を Q，C_3 と C_1 の O 以外の交点を R とする。ただし P, Q, R は相異なる点とする。
>
> 円 C_1 上に弧 $\overset{\frown}{\mathrm{POR}}$ 上にない点 A をとる。直線 AP と円 C_2 の交点を B，直線 BQ と円 C_3 の交点を D とする。
>
> このとき，3点 A，R，D は一直線上にあることを示せ。

勉：先生，いきなり難しすぎてどこから手を付けてよいかわかりません。

先生：では，私が図を描いてみるね。この図の場合に証明してみてごらん。ただし，どんな定理や性質を使ったかは明記してね。



勉：こんな証明でどうでしょう？

$\boxed{\qquad\qquad\text{ア}\qquad\qquad}$

先生：OK だ。でも，これだけでは元の問題を完全に証明したことにはならないよ。

勉：え？どうしてですか？

先生：君の書いた証明・説明が通用しないような場合$_{イ}$が考えられるんだ。そのような図を 1 つでいいから描いてみてごらん。

勉：なるほど，こんな図の場合は，僕の書いた証明ではダメなんですね。

先生：この問題のように，幾何の問題は一般的に証明することはとても難しいんだ。他の図の場合などでどのようになるかなど，引き続き考えてみよう。

(1) 空欄アに入る証明を述べよ。

(2) 下線部イの「証明・説明が通用しないような場合」は，どのような場合か。解答用紙の図にかき加える形で，1 つ示せ。ただし円 C_1 の中心が，円 C_2, C_3 の中心を通る直線より上で，かつ直線 OQ より左側になるようにすること。

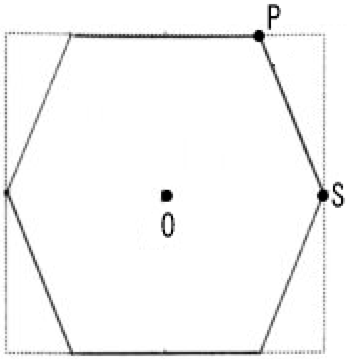
(3) (2) の図の場合にも，3 点 A, R, D が一直線上にあることを証明せよ。なお，解答欄 (2) の図に考察をかき加えてよい。

開成高校　解答

1　(1)　$x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 1}{7}$　　(2)　0.261　　(3)　4 通り　　(4)　42 通り

2　(1)　$A = \dfrac{x^2 + 2x + y^2 + 1}{xy^2}$　　(2)　$B = \dfrac{x+1}{y}$　　(3)　$A = x$　　(4)　$B = y$

3　(1)



(2)　(i)　$PS = \sqrt{3}\,\ell$

(ii)　$\ell^2 + 2\ell - 4 = 0$

(iii)　$\ell = \sqrt{5} - 1$

(3)　(i)　$\triangle OPS = 2$

(ii)　$h = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3}$

(4)　$\dfrac{80(\sqrt{5} - 1)}{3}$

4　省略