数学　問題・解答用紙　＜No.1＞

1　(40 点)

次の $\boxed{\quad}$ をうめよ。

(1)　方程式 $7x - y = 5x - 2y = 9$ の解は $x = \boxed{\quad}$, $y = \boxed{\quad}$ である。

(2)　太郎君が先生に，太郎君が解いた 2 次方程式についての話をしている。

太郎「 黒板に書かれていた方程式は，左辺がxの 2 次式で x^2の係数は 2 でした。右辺は 0 でした。ノートに式を書き写して方程式を解いたら，解が $x = 1,\ \dfrac{3}{2}$ と求まりました。正しい答えをみると，$x = 1$ は解でしたが，$x = \dfrac{3}{2}$ は解ではありませんでした。

見直しをしていると，式を写し間違えていることに気づきました。xの係数と定数項を逆にして，ノートにはxの係数を $\boxed{\quad}$ ，定数項を $\boxed{\quad}$ と書いてしまったのです。訂正して解き直すと，正しい答えになりました。しかし，写し間違えた式の方の答えも気になるので教えてください。」

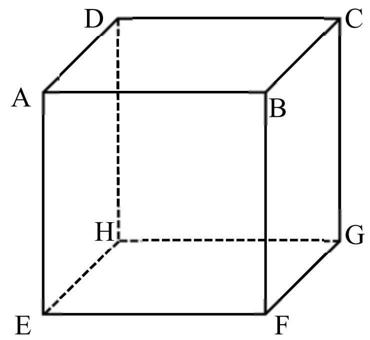
先生「 $x = 1,\ \dfrac{3}{2}$ で合っていますね。写し間違いには注意しましょう。」

黒板に書かれていた方程式の解は $x = 1,\ \boxed{\quad}$ である。

(3)　a のとる値の範囲が $-4 \leqq a \leqq -2$ のとき， $b = a + 1$ と定めると， b のとる値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。このとき， $c = b^2$ と定め，さらに $d = \dfrac{1}{c}$ と定めると， d のとる値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(4)　1辺の長さが 5 の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB，AD 上にそれぞれ点 P，Q を AP = 2，AQ = 2 となるようにとる。

このとき， PQ = $\boxed{\quad}$ ，QE = $\boxed{\quad}$ ，EP = $\boxed{\quad}$ であり，△EPQ の面積は $\boxed{\quad}$ である。また，3 点 E，P，Q を通る平面を K としたとき，K に垂直で A を通る直線と K の交点を L とすると，AL = $\boxed{\quad}$ である。



受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.2＞

2　(15 点)

0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 3 個の数字を選び, 横に一列に並べて 3 桁の整数をつくる。

次の問いに答えよ。

(1)　つくることができる 3 桁の整数は何個あるか求めよ。

(2)　つくることができる 3 桁の整数のうち 430 以上の整数は何個あるか求めよ。

(3)　つくることができる 3 桁の整数のうち 6 の倍数は何個あるか求めよ。

(1)

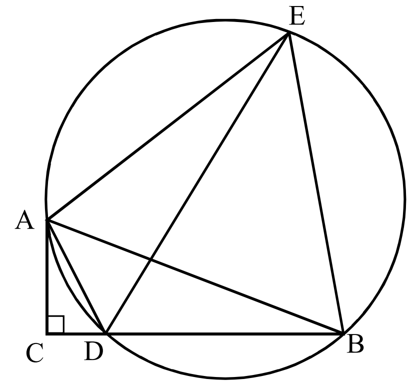
(2)

(3)

3　(15 点)

図のように, $\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D があり, 四角形 ADBE のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとする。

AB＝7, AD＝3, BD＝5, AE＝BE のとき, 次の問いに答えよ。



(1)　線分 CD の長さを求めよ。

(2)　∠ADBの大きさを求めよ。解答欄には答えのみを記せ。

(3)　四角形 ADBE の面積を求めよ。

(1)

(2)

(3)

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4 (15 点)

$a>1$ とする。 xy 平面上に 4 点 A, B, C, D がある。点 A は関数 $y=ax^2$ $(x>0)$ のグラフ上にあり，点 B は関数 $y=\frac{1}{a}x^2$ $(x>0)$ のグラフ上にある。点 C は y 軸上にあり，C の y 座標は正である。点 D は x 軸上にあり，D の x 座標は正である。

次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=-x+b$ 上に 4 点 A, B, C, D があるとする。2 点 A, B が線分 CD を 3 等分するとき， a, b の値をそれぞれ求めよ。

(2) 原点を中心とする 1 つの円周上に 4 点 A, B, C, D があるとする。2 点 A, B が弧 CD を 3 等分するとき， a^2 の値と，この円の面積を求めよ。

(1)

(2)

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.4＞

5 （15 点）

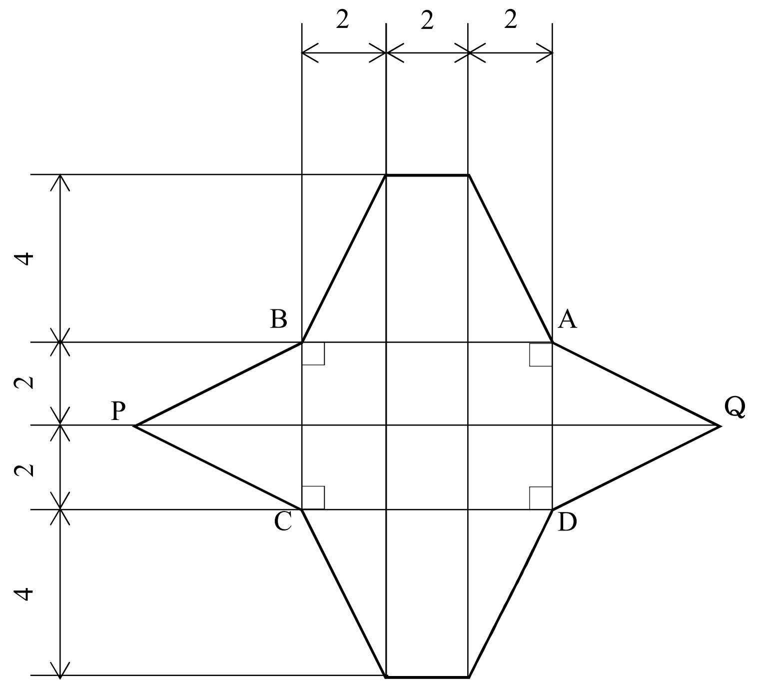
長方形 ABCD が底面で，2 つの合同な二等辺三角形と 2 つの合同な台形が側面の 5 面体 PQ-ABCD がある。下の図は，この 5 面体の展開図である。

次の問いに答えよ。

(1)　5 面体の 2 つの頂点 A，P を結んだ線分 AP の長さを求めよ。

(2)　5 面体の体積を求めよ。

(3)　底面が床に接するように 5 面体を床に置き，辺 AD を回転の軸として面 ADQ が床に接するまで回転させた。このとき，底面が回転してできた立体の体積を求めよ。



(1)

(2)

(3)

受験番号		小計		合計	

数学　問題・解答用紙　＜No.1＞

$\boxed{1}$ （40 点）

次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) 方程式 $7x-y=5x-2y=9$ の解は $x=\boxed{1}$, $y=\boxed{-2}$

である。

(2) 太郎君が先生に，太郎君が解いた 2 次方程式についての話をしている。

太郎「 黒板に書かれていた方程式は，左辺がxの 2 次式で x^2の係数は 2 でした。右辺は 0 でした。ノートに式を書き写して方程式を解いたら，解が $x=1,\ \frac{3}{2}$ と求まりました。正しい答えをみると，$x=1$ は解でしたが，$x=\frac{3}{2}$ は解ではありませんでした。

見直しをしていると，式を写し間違えていることに気づきました。xの係数と定数項を逆にして，ノートにはxの係数を $\boxed{-5}$ ，定数項を $\boxed{3}$ と書いてしまったのです。訂正して解き直すと，正しい答えになりました。しかし，写し間違えた式の方の答えも気になるので教えてください。」

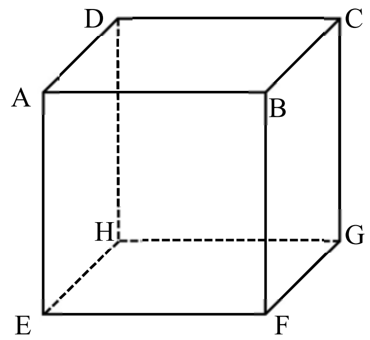
先生「 $x=1,\ \frac{3}{2}$ で合っていますね。写し間違いには注意しましょう。」

黒板に書かれていた方程式の解は $x=1,\ \boxed{-\frac{5}{2}}$ である。

(3) a のとる値の範囲が $-4 \leqq a \leqq -2$ のとき， $b=a+1$ と定めると， b のとる値の範囲は $\boxed{-3 \leqq b \leqq -1}$ である。このとき， $c=b^2$ と定め，さらに $d=\frac{1}{c}$ と定めると， d のとる値の範囲は $\boxed{\frac{1}{9} \leqq d \leqq 1}$ である。

(4) 1辺の長さが 5 の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB，AD 上にそれぞれ点 P，Q を AP = 2，AQ = 2 となるようにとる。

このとき， $\mathrm{PQ}=\boxed{2\sqrt{2}}$ ，$\mathrm{QE}=\boxed{\sqrt{29}}$ ，$\mathrm{EP}=\boxed{\sqrt{29}}$ であり，△EPQ の面積は $\boxed{3\sqrt{6}}$ である。また，3 点 E，P，Q を通る平面を K としたとき，K に垂直で A を通る直線と K の交点を L とすると，$\mathrm{AL}=\boxed{\frac{5}{9}\sqrt{6}}$ である。



受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.2＞

2　(15 点)

0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 3 個の数字を選び，横に一列に並べて 3 桁の整数をつくる。

次の問いに答えよ。

(1)　つくることができる 3 桁の整数は何個あるか求めよ。

(2)　つくることができる 3 桁の整数のうち 430 以上の整数は何個あるか求めよ。

(3)　つくることができる 3 桁の整数のうち 6 の倍数は何個あるか求めよ。

(1) 百の位の選び方は 5 通り。
百の位を定めたとき，十の位の選び方は 5 通り。
百と十の位を定めたとき，一の位の選び方は 4 通り。
よって，$5 \times 5 \times 4 = 100$（個）・・・(答)

(2) 百の位が 5 のとき，十と一の位の選び方は 5×4 通り。
百の位が 4 のとき，十の位は 3 か 5 で，それぞれ一の位は 4 通り。
よって，$5 \times 4 + 2 \times 4 = 28$（個）・・・(答)

(3) 2 の倍数かつ 3 の倍数であれば 6 の倍数である。
2 の倍数だから，一の位は 0，2，4 のいずれか
3 の倍数だから，各位の数を足すと 3 の倍数
一の位が 0 のとき，足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
12，15，21，24，42，45，51，54
よって，8 通り。
一の位が 2 のとき，足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
10，13，31，34，40，43
よって，6 通り。
一の位が 4 のとき，足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
20，23，32，35，50，53
よって，6 通り。
以上より，6 の倍数の個数は，$8 + 6 + 6 = 20$（個）・・・(答)

3　(15 点)

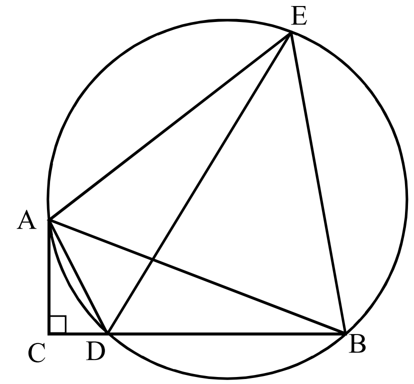
図のように，$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D があり，四角形 ADBE のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとする。

AB＝7，AD＝3，BD＝5，AE＝BE のとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 CD の長さを求めよ。

(2)　∠ADBの大きさを求めよ。解答欄には答えのみを記せ。

(3)　四角形 ADBE の面積を求めよ。



(1) $CD = x$ とする。$BC = x + 5$ と表せる。
△ADC と△ABC で三平方の定理を用いて，
$$AC^2 + CD^2 = AD^2,\quad AC^2 + BC^2 = AB^2$$
よって，
$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = AB^2 - BC^2$$
$$9 - x^2 = 49 - (x+5)^2$$
$$10x = 15$$
$$x = \frac{3}{2}$$
よって，
$$CD = \frac{3}{2}$$ ・・・(答)

(2) 120°

(3) △ABE は二等辺三角形だから $\angle ABE = \angle BAE$
円周角の定理より $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle BAE = \angle BDE$ だから，$\angle ADE = \angle BDE$
(2)より $\angle ADE + \angle BDE = 120^\circ$ だから，$\angle ADE = \angle BDE = 60^\circ$
よって，$\angle ABE = \angle BAE = 60^\circ$ だから，△ABE は正三角形で $EA = EB = AB = 7$
AB の中点を M とすると $AB \perp EM$ だから，△AEM で三平方の定理を用いて
$$EM^2 = AE^2 - AM^2 = 7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49 \times 3}{4}$$ より，$EM = \frac{7}{2}\sqrt{3}$
△ADC で三平方の定理を用いて，$AC^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$ より，$AC = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
求める面積は，$\triangle ABE + \triangle ABD = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ ・・・(答)

受験番号		小計	

数学 問題・解答用紙 ＜No.3＞

4 (15 点)

$a>1$ とする。 xy 平面上に4点A, B, C, Dがある。点Aは関数 $y=ax^2$ $(x>0)$ のグラフ上にあり, 点Bは関数 $y=\frac{1}{a}x^2$ $(x>0)$ のグラフ上にある。点Cは y 軸上にあり, Cの y 座標は正である。点Dは x 軸上にあり, Dの x 座標は正である。

次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=-x+b$ 上に4点A, B, C, Dがあるとする。2点A, Bが線分CDを3等分するとき, a, b の値をそれぞれ求めよ。

(2) 原点を中心とする1つの円周上に4点A, B, C, Dがあるとする。2点A, Bが弧CDを3等分するとき, a^2 の値と, この円の面積を求めよ。

(1) 軸と直線の交点がC, Dだから, $b>0$で, $\mathrm{C}(0,b)$, $\mathrm{D}(b,0)$

$a>1$ だから, 直線上でC, A, B, Dの順に並ぶ。

A, Bは線分CDを3等分するから, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{3}b,\frac{2}{3}b\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}b,\frac{1}{3}b\right)$

Aは $y=ax^2$ の上の点だから, $\frac{2}{3}b=a\times\frac{1}{9}b^2$ より, $a=\frac{6}{b}$

よって, Bは $y=\frac{b}{6}x^2$ 上の点だから, $\frac{1}{3}b=\frac{b}{6}\times\frac{4}{9}b^2$

$b>0$ より, 両辺を b で割って $\frac{1}{3}=\frac{2}{27}b^2$ だから, $b^2=\frac{9}{2}$

よって, $b=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

このとき, $a=6\times\frac{1}{b}=6\times\frac{\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

以上より, $a=2\sqrt{2}$, $b=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ・・・(答)

(2) 円の半径を r とする。軸と円の交点がC, DだからC$(0,r)$, D$(r,0)$

$a>1$ だから, 円周上でC, A, B, Dの順に並ぶ。

A, Bは弧CDを3等分するから, $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$

また, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$ だから, △AODと△BOCは正三角形。

ODの中点をMとすると△OAMは直角三角形。また, $\mathrm{OM}=\frac{1}{2}r$

△OAMで三平方の定理を用いて, $\mathrm{AM}^2=\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2=r^2-\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{4}r^2$

よって, $\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$ だから, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}r,\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$, 同様にして $\mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\frac{1}{2}r\right)$

Aは $y=ax^2$上の点だから, $\frac{\sqrt{3}}{2}r=a\times\frac{1}{4}r^2$ より, $a=\frac{2\sqrt{3}}{r}$

よって, Bは$\mathrm{y}=\frac{r}{2\sqrt{3}}x^2$上の点だから, $\frac{1}{2}r=\frac{r}{2\sqrt{3}}\times\frac{3}{4}r^2$

$r>0$ より両辺を r で割って $\frac{1}{2}=\frac{3}{4\sqrt{3}}r^2$ だから, $r^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

このとき, $a^2=\frac{12}{r^2}=\frac{36}{4\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ で, 円の面積は $\pi r^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

以上より, $a^2=3\sqrt{3}$, 円の面積は $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.4＞

5　(15 点)

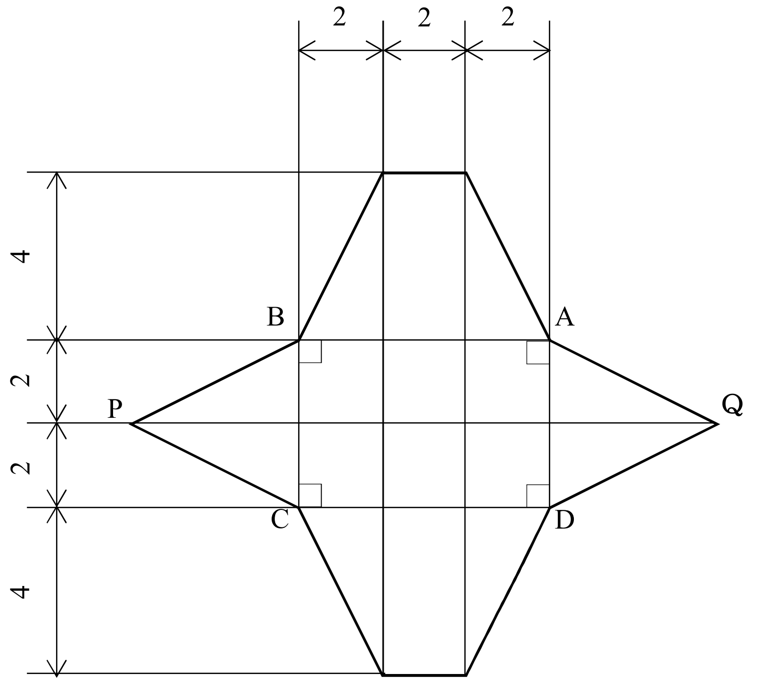
長方形 ABCD が底面で，2 つの合同な二等辺三角形と 2 つの合同な台形が側面の 5 面体 PQ-ABCD がある。下の図は，この 5 面体の展開図である。

次の問いに答えよ。

(1)　5 面体の 2 つの頂点 A，P を結んだ線分 AP の長さを求めよ。

(2)　5 面体の体積を求めよ。

(3)　底面が床に接するように 5 面体を床に置き，辺 AD を回転の軸として面 ADQ が床に接するまで回転させた。このとき，底面が回転してできた立体の体積を求めよ。



(1) 線分 AB を 3 等分する点のうち，B に近い方を E とする。

$AE = PE = 4$ で，$\triangle APE$ は直角三角形だから，三平方の定理より，

$AP^2 = AE^2 + PE^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

$AP = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

(2) 線分 CD を 3 等分する点のうち，C に近い方を F とすると，H は EF の中点である。

$PE = 4,\ EH = 2$ で，$\triangle AEH$ は直角三角形だから，三平方の定理より，

$PH^2 = PE^2 - EH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

$PH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

P を通り AB に垂直な平面と，Q を通り AB に垂直な平面で 5 面体を切る。

2 つの四角錐と 1 つの三角柱ができる。

四角錐の体積は，$2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

三角柱の体積は，$4 \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} \times 2 = 8\sqrt{3}$

よって，5 面体の体積は，$\dfrac{16\sqrt{3}}{3} \times 2 + 8\sqrt{3} = \dfrac{56\sqrt{3}}{3}$

(3) 線分 AD の中点を M とする。

面 ADQ と底面の間の角は $\angle QMH$ と等しい。

QM，QH の長さは，どちらも PE の長さと等しい。

よって，$QM = QH = EH = 4$ だから $\triangle QMH$ は正三角形で，$\angle QMH = 60^\circ$

$\angle QMH$ の外角は $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

よって，AD を軸に回転させたとき，底面は120°回転する。

回転してできる立体は，

中心角120°，半径 6 の扇形が底面で，高さ 4 の柱

よって，体積は，

$6^2\pi \times \dfrac{120}{360} \times 4 = 48\pi$

受験番号		小計		合計	