

1 次の各問に答えよ。

〔問1〕 $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^3 - \frac{4}{\sqrt{24}} \div \frac{18}{\sqrt{6}-12}$ を計算せよ。

〔問2〕 2次方程式 $\frac{(x+1)(x-1)}{4} - \frac{(x-2)(2x+3)}{2} = 1$ を解け。

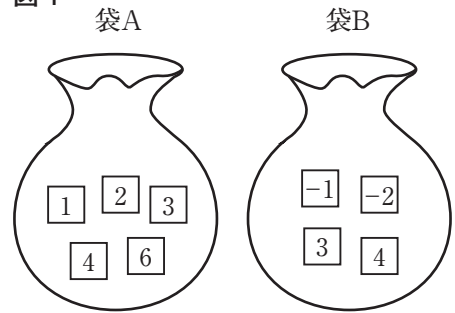
〔問3〕 右の図1のように、1, 2, 3, 4, 6の数が1つずつ書かれた5枚のカードが入っている袋Aと、
-1, -2, 3, 4の数が1つずつ書かれた4枚のカードが入っている袋Bがある。

2つの袋A, Bから同時にそれぞれ1枚のカードを取り出す。このとき、袋Aから取り出したカードに書かれた数を a 、袋Bから取り出したカードに書かれた数を b とする。

$\sqrt{2a+b}$ が自然数になる確率を求めよ。

ただし、2つの袋A, Bそれぞれにおいて、どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

図1



〔問4〕 右の図2で、点Oは線分ABを直径とする円の中心であり、3点C, D, Eは円Oの円周上にある点である。

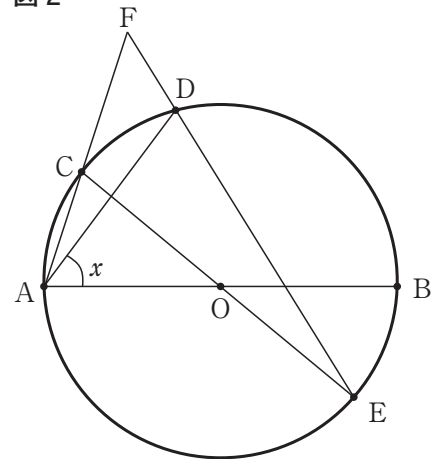
5点A, B, C, D, Eは、図2のように、A, C, D, B, Eの順に並んでおり、互いに一致せず、3点C, O, Eは一直線上にある。

線分ACをCの方向に延ばした直線と線分EDをDの方向に延ばした直線との交点をFとする。

点Aと点D、点Cと点Eをそれぞれ結ぶ。

$\angle AFE = 52^\circ$ 、 $\angle CEF = 18^\circ$ のとき、 x で示した $\angle BAD$ の大きさは何度か。

図2

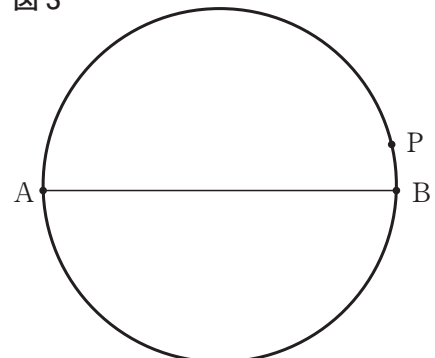


〔問5〕 右の図3で、点Pは線分ABを直径とする円の周上にあり、点Aを含まない $\widehat{BP}$ の長さを a cm、点Aを含む $\widehat{BP}$ の長さを b cmとしたとき、 $a:b=1:23$ を満たす点である。

解答欄に示した図をもとにして、 $a:b=1:23$ となる点Pを直径ABより上側に定規とコンパスを用いて作図し、点Pの位置を示す文字Pも書け。

ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

図3



2 右の図1で、点Oは原点、曲線 f は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを表している。

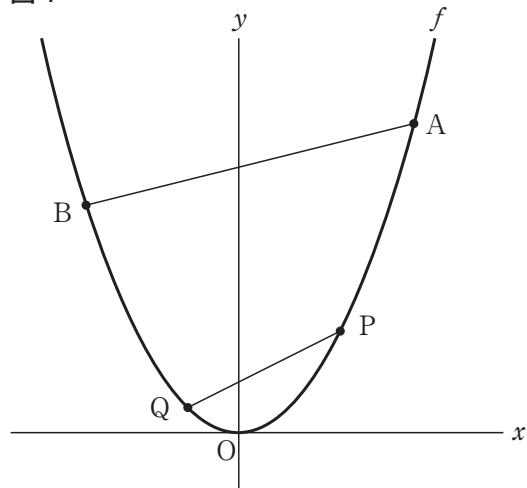
4点A, B, P, Qはすべて曲線 f 上にあり、点Pの x 座標は t ($t > 0$)、点Qの x 座標は負の数である。

点Aの x 座標は点Pの x 座標より大きく、点Bの x 座標は点Qの x 座標より小さい。

点Aと点B、点Pと点Qをそれぞれ結ぶ。

点Oから点(1, 0)までの距離、および点Oから点(0, 1)までの距離をそれぞれ1 cmとして、次の各問に答えよ。

図1

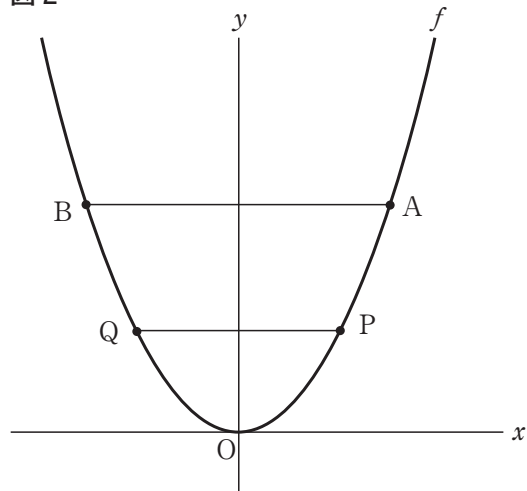


〔問1〕 右の図2は、図1において、線分ABと線分PQがともに x 軸に平行になる場合を表している。

次の(1), (2)に答えよ。

- (1) 点Aの y 座標と点Pの y 座標の差が t であり、 $AB = 4$ cmであるとき、 t の値を求めよ。

図2

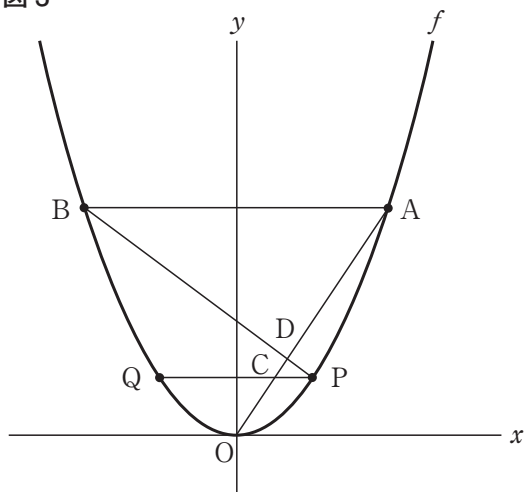


- (2) 右の図3は、図2において、点Aの x 座標を3とし、点Oと点A、点Bと点Pをそれぞれ結び、線分OAと線分PQ、線分OAと線分PBとの交点をそれぞれC、Dとした場合を表している。

$\triangle ABD$ と $\triangle CPD$ の相似比が8:1となるときの、点Dの座標を求めよ。

ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

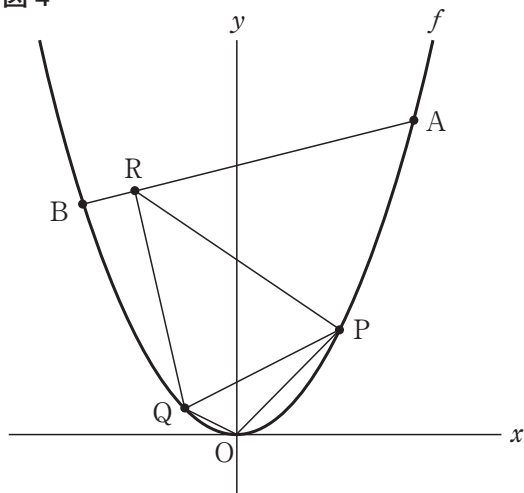
図3



- 〔問2〕 右の図4は、図1において、点Qの x 座標を $-\frac{t}{2}$ 、線分AB上にある点をRとし、点Oと点P、点Oと点Q、点Pと点R、点Qと点Rをそれぞれ結んだ場合を表している。

2点P、Qを通る直線の傾きが $\frac{1}{4}$ で、点Rが線分AB上のどこにあっても、常に $\triangle RQP$ の面積が $\triangle OPQ$ の面積の3倍となるときの、2点A、Bを通る直線の式を求めよ。

図4



3

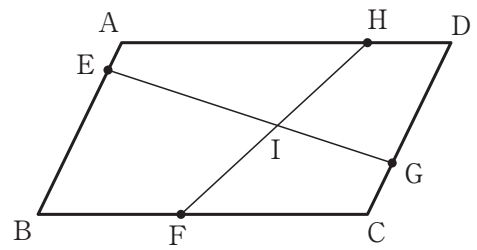
右の図 1 で，四角形 ABCD は平行四辺形である。

点 E, F, G, H は，それぞれ辺 AB, 辺 BC, 辺 CD, 辺 DA 上にある点である。

点 E と点 G, 点 F と点 H をそれぞれ結び，線分 EG と線分 FH との交点を I とする。

次の各問に答えよ。

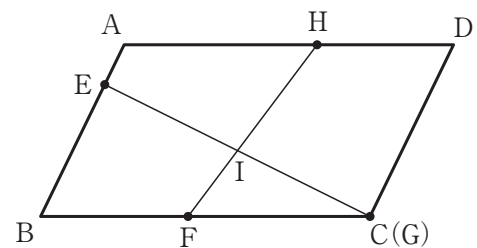
図 1



〔問 1〕 右の図 2 は，図 1 において，点 G が頂点 C に一致し， $\angle BEC = 90^\circ$ ， $BE = BF$ ， $EI = IC$ となる場合を表している。

$\angle ABC = 60^\circ$ のとき， $\angle EIF$ の大きさは何度か。

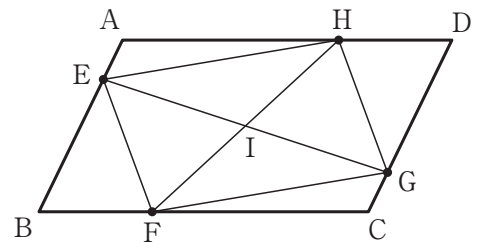
図 2



〔問2〕 右の図3は、図1において、点Iが
四角形ABCDの対角線の交点に一致し、
点Eと点F、点Eと点H、点Fと点G、点Gと
点Hをそれぞれ結んだ場合を表している。

四角形EFGHは平行四辺形であることを証明
せよ。

図3



〔問3〕 右の図4は、図1において、

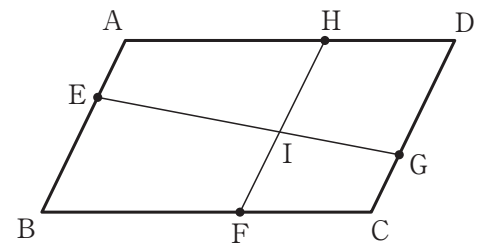
$$AE : EB = CG : GD = 1 : 2,$$

$$BF : FC = AH : HD = m : (2 - m) \quad (0 < m < 2)$$

となる場合を表している。

線分HIの長さと線分IFの長さの比を m を用
いて表せ。

図4



- 4 先生が数学の授業で次の【課題】を出した。この【課題】について考えている【太郎さんと花子さんの会話】を読んで、あとの各問に答えよ。

【課題】

3以上の自然数 N を、2つの自然数 x, y の和で、 $N = x + y$ と表す。ただし、 $x > y$ とする。さらに、 x と y の積 xy を考える。

このとき、積 xy が2つの自然数 m, n の平方の差で、 $xy = m^2 - n^2$ と表すことができるのは N がどのような場合か考えよ。

【太郎さんと花子さんの会話】

太郎：まずは N に具体的な数を当てはめて考えてみよう。 $N = 8$ としたらどうかな。

花子：8は $7 + 1$ か $6 + 2$ か $5 + 3$ だから、 $N = 8$ のとき x と y の積 xy は3組あるね。

太郎： $7 \times 1 = 4^2 - 3^2$, $6 \times 2 = 4^2 - 2^2$, $5 \times 3 = 4^2 - 1^2$ だから、 $N = 8$ とすると積 xy は、必ず自然数の平方の差で表すことができるね。 $N = 7$ とするとどうかな。

花子：積 xy は、必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。

太郎： N としてもっと大きな数でいくつか考えてみようか。 $N = 2020$ や $N = 2021$ の場合はどうかな。

花子：大きな数だからすぐには分からないけど、積 xy を自然数の平方の差で必ず表すためには N に何か条件が必要だと思う。

太郎：そうか、分かった。(2) N が偶数のときには、積 xy は必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。

花子： $N = x + y$ だから、2つの数 x, y がともに偶数なら N は偶数だね。

太郎：そうだね。ちなみに、2つの数 x, y について【表】で示される関係があるよ。ア～オには偶数か奇数のどちらかが必ず入るよ。

【表】

	x, y ともに偶数	x, y ともに奇数	x, y どちらかが偶数でもう一方が奇数
$x + y$	偶数	ア	イ
$x - y$	ウ	エ	オ

花子：なるほどね。じゃあ、 $N = 2021$ の場合は、積 xy は自然数の平方の差で必ずしも表せるとは限らないということかな。

太郎：そうだね。例えば、 $2021 = x + y$ として、 $x = 2019, y = 2$ のときは、積 xy は自然数の平方の差で表せないけど、(3) $x = 1984, y = 37$ のときは、積 xy は自然数の平方の差で表すことができるよ。

〔問 1〕 (1) 積 xy は、必ずしも自然数の平方の差で表せるとは限らないね。とあるが、 $N = 7$ の場合、自然数の平方の差で表すことができる (x, y) の組は 1 組である。このとき x と y の積 xy を求めよ。

〔問 2〕 (2) N が偶数のときには、積 xy は必ず自然数の平方の差で表すことができるよ。 が正しい理由を文字 N, x, y, m, n を用いて説明せよ。

ただし、【表】の **ア**～**オ**に偶数か奇数を当てはめた結果については証明せずに用いてよい。

〔問 3〕 (3) $x = 1984, y = 37$ のときは、積 xy は自然数の平方の差で表すことができるよ。 とあるが、 $1984 \times 37 = m^2 - n^2$ を満たす自然数 (m, n) の組は何組あるか。

解答用紙 数学

ちゅうい　じ　こう
マーク・解答上の注意事項

- 1 受験番号欄は、じゆけんばんごうらん H・B 又は B の鉛筆（シャープペンシルも可）を使って、また  の中を正確に塗りつぶすこと。
- 2 記入した内容を直すときは、きれいに消して、消しきずを残さないこと。
- 3 決められた欄以外にマークしたり、記入したりしないこと。

良 い 例	悪 い 例	
	 線  丸囲み	 小さい  レ点  はみ出し  うすい

* 受検番号欄は裏面にもあります。

(3-西)

受 検 番 号						
①	①	①	①	①	①	①
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

1

〔問 1〕

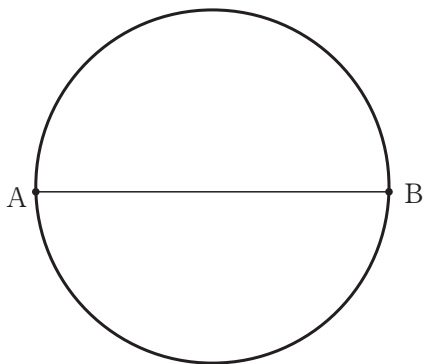
〔問 2〕

〔問 3〕

〔問 4〕

度

〔問 5〕



2

〔問 1〕

(1)

 $t =$

〔問 1〕

(2)

【 途中の式や計算など 】

(答え) $D \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

〔問 2〕

$$\gamma =$$

3

〔問 1〕

度

〔問 2〕

【 証 明 】

〔問 3〕

HI : IF = () : ()

4

〔問 1〕

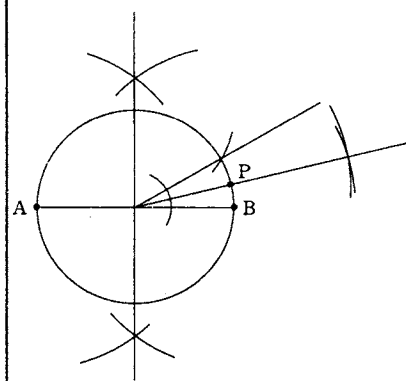
〔問 2〕

【 説 明 】

〔問 3〕

組

正答表

1		点	
〔問 1〕	$-\frac{1}{9}$	5	
〔問 2〕	$x = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}$	5	
〔問 3〕	$\frac{1}{5}$	5	
〔問 4〕	52 度	5	
〔問 5〕 解答例			5

数 学

2		点
〔問 1〕 (1)	$t = -1 + \sqrt{5}$	7
〔問 1〕 (2) 解答例	【途中の式や計算など】	10
$P(t, \frac{1}{2}t^2), Q(-t, \frac{1}{2}t^2), A(3, \frac{9}{2}), B(-3, \frac{9}{2})$である。 $\triangle ABD$と$\triangle CPD$の相似比が8:1より、$PC = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$(cm)となるので、 $C(t - \frac{3}{4}, \frac{1}{2}t^2)$と表せる。2点O、Aを通る直線の式は$y = \frac{3}{2}x$であり、点Cはこの直線上の点であることから、 $\frac{1}{2}t^2 = \frac{3}{2}(t - \frac{3}{4})$ $4t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \therefore t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ よって$P(\frac{3}{2}, \frac{9}{8})$となる。 そこで、2点B、Pを通る直線の式を$y = mx + n$とおくと $\begin{cases} \frac{3}{2}m + n = \frac{9}{8} \\ -3m + n = \frac{9}{2} \end{cases}$これを解いて、$m = -\frac{3}{4}, n = \frac{9}{4}$ 2点B、Pを通る直線の式は、$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$である。 したがって、点Dは直線$y = \frac{3}{2}x$と直線$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$との交点であるから、 連立方程式を解いて、$x = 1, y = \frac{3}{2}$		
(答え) $D(1, \frac{3}{2})$		
〔問 2〕	$y = \frac{1}{4}x + 1$	8

(3-西)

3		点
〔問 1〕	90 度	7
〔問 2〕 解答例	【証明】	10
頂点Aと頂点Cを結ぶと、 仮定より点Iは対角線AC上にある。 $\triangle AIE$と$\triangle CIG$において、 点Iは、平行四边形ABCDの対角線の交点より、 $AI = CI \dots ①$ 対頂角は等しいから、$\angle AIE = \angle CIG \dots ②$ 平行四辺形の対辺なので、$AB \parallel DC \dots ③$ ③より、錯角は等しいので、$\angle EAI = \angle GCI \dots ④$ ①、②、④より、 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle AIE \cong \triangle CIG$ 合同な図形の対応する線分の長さは等しいので、 $EI = GI \dots ⑤$ 頂点Bと頂点Dを結ぶと、 仮定より点Iは対角線BD上にある。 $\triangle BIF$と$\triangle DIH$において、 同様にして、 $\triangle BIF \cong \triangle DIH$であるから、$FI = HI \dots ⑥$ 四角形EFGHにおいて、 ⑤、⑥より、対角線がそれぞれの中点で交わるので、 四角形EFGHは平行四辺形である。		
〔問 3〕	$HI : IF = (m+2) : (4-m)$	8

4		点
〔問 1〕	12	7
〔問 2〕 解答例	【説明】	10
$N = x + y$について、$xy = m^2 - n^2$より $xy = (m+n)(m-n)$ x, y, m, nは自然数で、$xy > 0, m+n > 0$なので $m-n > 0$となる。 また、$m+n > m-n$である。 $x > y$なので、 $x = m+n \dots ① \quad y = m-n \dots ②$とすると ①+②より $m = \frac{x+y}{2}$ ①-②より $n = \frac{x-y}{2}$ ここで、m, nが自然数となるには $x+y$と$x-y$がともに偶数と ならなければならない。 $x+y$と$x-y$がともに偶数となるのは【表】より xとyがどちらも偶数か、どちらも奇数の 場合である。 このとき、$N = x + y$より、Nは偶数となる。		
〔問 3〕	10 組	8